3. Énoncés des exercices

Exercice 2.1 1. Rappelez les critères classiques de divisibilité :

- Un entier est divisible par 2 ssi
- Un entier est divisible par 3 ssi
- Un entier est divisible par 5 ssi
- Citez éventuellement d'autres critères de divisibilité :

2. Cochez les cases correspondantes :

	Divisible par 2	Divisible par 3	Divisible par 5	Divisible par 11
66				
87				
231				
302				
438				
725				
520				
4824				
56289				

Exercice 2.2 Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $n - 2$ divise $n + 5$.

Exercice 2.3 Déterminer les entiers naturels tels que $n^3 + 4n = 240$. On pourra distinguer les cas n pair et n impair.

Exercice 2.4 On considère deux entiers relatifs a et b .
Démontrer l'équivalence suivante : $7|(2a + 5b) \Leftrightarrow 7|(5a + 2b)$.

Exercice 2.5 Def 01 : Une partie non vide A de $\mathbb{R}$ est dite **minorée** ssi il existe un réel m t.q. pour tout a de A , $m \leq a$. m est appelé un **minorant** de l'ensemble A .

Def 02 : Une partie non vide A de $\mathbb{R}$ admet un **plus petit élément** d ssi :

$$\left\{ \begin{array}{l} d \in A \\ \text{pour tout } a \in A, d \leq a \end{array} \right.$$

- Dans $\mathbb{R}$
 - Montrer que si une partie de $\mathbb{R}$ admet un plus petit élément, alors elle est minorée.
 - Montrer à l'aide d'un **contre-exemple** que la réciproque est fautive.
- Dans $\mathbb{N}$ Les parties A de $\mathbb{N}$ suivantes ont-elles un plus petit élément ? Si oui, on précisera sa valeur.
 - $A = \mathbb{N}$
 - A est l'ensemble des entiers naturels impairs
 - A est l'ensemble des multiples non nuls de 2013
 - A est l'ensemble des *diviseurs propres** de $5^3 \times 7^4$
 - A est l'ensemble des diviseurs communs à 3 et 5 autres que 1

* Les *diviseurs propres* d'un entier naturel sont ses diviseurs positifs autres que lui-même.
On admettra que **toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.**

Exercice 2.6 Démonstration de la Pté 2.3 Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

Pour démontrer l'équivalence : n premier $\Leftrightarrow n$ n'a pas de diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$, on va "découper" cette équivalence en deux implications :

- ($\Rightarrow$). Si n premier, alors n n'a pas de diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.
- ($\Leftarrow$). Si n n'a pas de diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$, alors n est premier.

1. On suppose que n est premier. Justifier que 1 est le seul diviseur de n inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.
En déduire que n n'a pas de diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.
2. On suppose que n n'a pas de diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.
On va **raisonner par l'absurde**, c'est-à-dire que l'on va supposer le contraire de ce que l'on veut démontrer, et essayer d'aboutir à une contradiction.
Supposons donc que n n'est pas premier. n admet donc des diviseurs autres que 1 et lui-même, et l'ensemble de ces diviseurs admet un plus petit élément, que l'on notera m .
 - (a) Justifier que m est premier
 - (b) Justifier qu'il existe un entier k tel que $1 < m \leq k < n$ et $n = mk$.
 - (c) En déduire que $m^2 \leq n$ et conclure.

Exercice 2.7 Démonstration de la Pté 2.4 Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

On veut montrer que : n est premier ou n peut s'écrire comme produit de nombres premiers.

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe des entiers supérieurs ou égaux à 2 qui ne sont ni premiers ni produits de nombres premiers.

Soit m le plus petit d'entre eux.

1. Justifier l'existence d'entiers q et k tels que :

$$\begin{cases} m = k \times q \\ 2 \leq q < m \\ 2 \leq k < m \end{cases}$$

2. Justifier que q et k sont soit premiers, soit produit de nombres premiers.
3. Conclure

Exercice 2.8 Décomposition en facteurs premiers : tutoriel en vidéo, chaîne Youtube Maths Langella, titre de la vidéo : "Decomposition d'un entier en facteurs premiers"

1. Déterminer la décomposition en facteurs premiers des entiers suivants :
117 ; 665 ; 16184 ; 4554 ; 19343
2. Déterminer $\text{Pgcd}(117; 4554)$, en déduire la forme irréductible de $\frac{4554}{117}$.
Simplifier $\sqrt{19343}$.

Exercice 2.9 Répartition des nombres premiers : de moins en moins nombreux ? (*Recherche*) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $n!$ et on appelle "factorielle n " le produit des entiers de 1 à n :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$

1. Pour tout entier $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$, donner un diviseur de $(n! + k)$ autre que 1 et $(n! + k)$ (on appelle cela un *diviseur propre* ou *diviseur non trivial*).
2. Utiliser ce résultat pour donner 5 entiers consécutifs non premiers
3. Existe-t-il une liste de cent milliards d'entiers consécutifs ne comportant aucun nombre premier ?

Le résultat précédent donne l'impression qu'à mesure que l'on s'éloigne de 0, les nombres premiers sont de plus en plus rares. Cependant, une conjecture du mathématicien Français Joseph Bertrand (1822-1900) démontrée par son confrère Russe Pafnouti Tchebychev (1821-1894) tempère cette impression :

Si $n > 3$, il y a toujours un nombre premier compris entre n et $2n$.